

# Condensados de Bose-Einstein em dimensões reduzidas

Wilson Rosado

Instituto de física de Sao Carlos/ USP

## 1. Introdução

Existe BEC 1D e 2D num gás ideal? A possibilidade de alcançar BEC em dimensões reduzidas, foi frustrada por muito tempo devido a uma razão muito simples. Para entender isso, considere um sistema de partículas de massa  $m$  que não interagem e obedecem pela lei de dispersão  $p^2/2m$ , o número total de partículas na distribuição de Bose-Einstein num espaço D-dimensional é dada por:

$$N = N_0 + \int_0^\infty \frac{\rho^{(D)}(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1} d\epsilon, \quad (1)$$

onde a densidade de estado  $\rho^{(D)}(\epsilon) \sim \epsilon^{\frac{D}{2}-1}$ . A condição para a realização de BEC, é que, a uma temperatura particular, o potencial químico tende a zero. Em seguida, o número de partículas fora do condensado é determinado pela integral

$$N_\epsilon \sim \frac{1}{\beta^{\frac{D}{2}}} \int_0^\infty \frac{x^{\frac{D}{2}-1}}{e^x - 1} dx. \quad (2)$$

onde  $x = \beta\epsilon$ . Esta integral deve convergir porque  $N$  é um número dado. A fim de determinar as condições de convergência da integral (2), expandimos em uma série de Taylor em torno de  $x = 0$ , portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \int \frac{x^{\frac{D}{2}-1}}{x} dx &\sim \int x^{\frac{D}{2}-2} dx \\ &\propto \begin{cases} x^{\frac{D}{2}-1} |_{x=0} & D \neq 2 \\ \ln|x| |_{x=0} & D = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

já que esta integral diverge se  $D \leq 2$ , não pode existir condensado nesta região. Mesmo que o resultado anterior foi feita para

um gás ideal, Hohenber[1] mostrou num teorema que não existe condensado em dimensões inferiores a  $D = 3$  mesmo se as partículas interagem. Mas mais tarde Widom [2] mostrou que este teorema é só valido em sistemas homogêneos, realimentando assim, as esperanças em conseguir BEC de dimensões reduzidas.

Este artigo tem como objetivo apresentar no mais coloquial possível as discussões teóricas e progresso experimental para a realização do Bose - Einstein (BEC) sem entrar em detalhes técnicos para sistemas de dimensões reduzidas, tudo baseado nos artigos [3] e [4].

## 2. Discussão teórica sobre BEC 1D e 2D de um gás ideal confinado harmonicamente

A observação de BEC em dimensões reduzidas de sistemas homogêneos (sistemas confinados por condições de fronteira rígida), não é possível com temperaturas finitas devido a flutuações térmicas que desestabilizam o condensado. Agora, se o sistema está confinado por um potencial que varia espacialmente, os efeitos das flutuações térmicas são eliminados devido à densidade de estado exibindo um comportamento diferente, enquanto que em um gás uniforme  $\rho^{(D)}(\epsilon)$  comporta-se como  $\epsilon^{\frac{D}{2}-1}$ , na presença de uma armadilha harmônica, por exemplo, em vez disso, tem  $\rho^{(D)}(\epsilon) \sim \epsilon^{D-1}$ , o sistema já não é homogêneo e em principio 2D-BEC pode ocorrer a uma temperatura crítica dada por

$$k_B T_{2D} = \hbar\omega_{2D} \left( \frac{N}{\zeta(2)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

onde  $\omega_{2D} = (\omega_x \omega_y)^{\frac{1}{2}}$ .

## 2.1 Condições para obter BEC em dimensões reduzidas

Para um gás de partículas que não interagem, confinadas por um potencial harmônico, o número de partículas é dado pelo grand canonical ensemble

$$N = N_0 + \sum_{n_x, n_y, n_z \neq 0} \frac{1}{e^{\beta \hbar (\omega_x n_x + \omega_y n_y + \omega_z n_z)} - 1}, \quad (4)$$

onde  $\omega_x, \omega_y$  e  $\omega_z$  são as frequências do oscilador nas três direções. A fim de avaliar esta soma explicitamente, normalmente assumemos que o espaçamento entre os níveis é muito pequeno e ainda mais pequeno quando  $N \rightarrow \infty$ , de modo que a soma pode ser substituída por uma integral:

$$N = N_0 + \int_0^\infty \frac{dn_x dn_y dn_z}{e^{\beta \hbar (\omega_x n_x + \omega_y n_y + \omega_z n_z)} - 1}, \quad (5)$$

Este assumption corresponde para uma descrição semiclássica dos estados excitados. Sua validade implica que as energias de excitação relevantes que contribuem para a soma (4), são muito maiores do que o espaço entre os níveis fixados pelas frequências dos osciladores. Os resultados relevantes para a dependência da temperatura de BEC foram obtidos assumindo que  $k_B T \gg \hbar \omega_x, \hbar \omega_y, \hbar \omega_z$ , para observar os efeitos da dimensionalidade reduzida, devem se eliminar esta condição em um ou duas direções, de modo que a dinâmica do sistema é congelado nestas direções. Por exemplo, para obter o 2D-BEC deve-se escolher  $\omega_z$  tal que  $\hbar \omega_{2D} \ll k_B T_{2D} < \hbar \omega_z$ .

## 2.2 Considerações no limite termodinâmico

Na equação (3) nota-se que em duas dimensões o limite termodinâmico corresponde em fazer  $N \rightarrow \infty$  e  $\omega_{2D} \rightarrow 0$ , de tal forma que a densidade é proporcional a  $N \omega_{2D}^2$  seja mantida constante, Isto significa que

nas armadilhas magnéticas, é necessário enfraquecer o potencial. Isto está bem definido matematicamente, mas fisicamente é irrealizável. Mas qualitativamente, não deveria se sentir tão desconfortável com o limite termodinâmico, porque parece que tudo o que o limite termodinâmico faz é eliminar os efeitos de borda, que são na sua maioria insignificantes em experiências reais. Para o caso 1D confinado harmonicamente não existe 1D-BEC devido a uma divergência logarítmica na equação (5). Isto significa que a temperatura crítica de 1D-BEC tende a zero no limite termodinâmico se deve-se manter  $N \omega_{1D}$  constante, como se mostra em (6).

$$k_B T_{1D} = \hbar \omega_{1D} \frac{N}{\ln(2N)}, \quad (6)$$

onde  $\omega_{1D} \equiv \omega_z$ . Embora não há 1D-BEC, este sistema pode exibir um grande número de ocupação dos estados mais baixos de uma partícula individual. Isso ocorre quando os parâmetros relevantes satisfazem simultaneamente as condições  $T_{1D} < T_{3D}$  e  $\hbar \omega_\perp < k_B T_{3D}$ , onde  $T_{3D}$  é a temperatura crítica para um gás ideal confinado harmonicamente em 3D e  $\omega_\perp = \omega_x = \omega_y$  é a frequência da armadilha no plano  $xy$ . No intervalo  $T_{1D} < T < T_{3D}$ , apenas os graus de liberdade radiais são congelados, enquanto não há nenhuma condensação no grau de liberdade axial. Em temperaturas baixas, abaixo de  $T_{1D}$ , a variável axial também começa a ser congelada e o estado fundamental é macroscopicamente ocupado. Esta condensação de dois passos é característica da geometria 1D e devido ao fator  $\ln N$ .

É também necessário falar que o 2D-BEC ocorre em qualquer potencial de aprisionamento  $V \sim r^\eta$  e 1D-BEC pode ocorrer na presença de um potencial de lei de potência  $V \sim \left(\frac{|x|}{L}\right)^\eta$  apenas se  $\eta$  é menor que 2; é dizer, se o potencial é mais confinado do que um potencial parabólico, tal como mues-

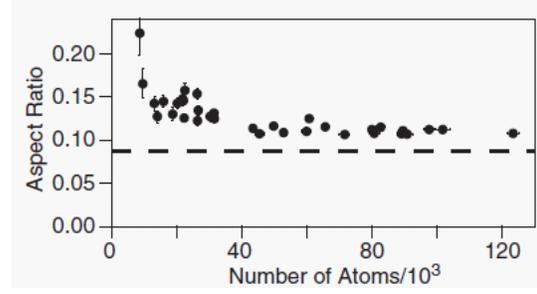
tra Bagnato [5].

### 3. Realização experimental de 1D-BEC e 2D-BEC

Um condensado de gas diluído de densidade  $n$  onde os átomos interagem fracamente em uma armadilha axialmente simétrica são caracterizados por quatro escalas de comprimento: o raios  $R_{\perp}$ , o comprimento medio axial  $R_z$ , o comprimento de espalhamento  $a$ , e o comprimento de cura  $\xi = (4\pi na)^{-\frac{1}{2}}$ . No regime  $R_{\perp}, R_z \gg \xi \gg a$ , o BEC é tridimensional e está bem descrita na aproximação de Thomas-Fermi. Um comportamento diferente do BEC é esperado quando o comprimento de cura é maior do que qualquer um dos comprimentos  $R_{\perp}$  ou  $R_z$  já que o condensado se restringe em uma ou duas dimensões, respectivamente. A realização experimental do 1D-BEC (forma de cigarro) com  $R_z > \xi > R_{\perp}$  em uma armadilha magnética muito alongada, e 2D-BEC (forma de disco) com  $R_{\perp} > \xi > R_z$  em uma armadilha optica, foi explorado no ano 2001 por Gorlitz et al. Estes foram produzidos com condensados 3D de átomos de  $^{23}\text{Na}$ , com a realização de dois processos separados: 1) inicialmente uma das frequências de confinamento, por exemplo  $\omega_z$  ( $\omega_{\perp}$ ) para obter um 2D-BEC (1D-BEC) é aumentada até que el raio do condensado  $R_z$  ( $R_{\perp}$ ) nessa dimensão é menor do que o comprimento de cura. Isto não é suficiente para reduzir a dimensionalidade; posto que os átomos, cada um dos quais tem massa  $m$ , tenemos que literalmente comprimir os átomos; portanto, O crossover a 1D e 2D ocorre se o número de átomos condensados se tornam em

$$N_{1D} = \sqrt{\frac{32\hbar}{225ma^2}} \sqrt{\frac{\omega_{\perp}}{\omega_z^2}},$$

$$N_{2D} = \sqrt{\frac{32\hbar}{225ma^2}} \sqrt{\frac{\omega_z^3}{\omega_{\perp}^4}}.$$



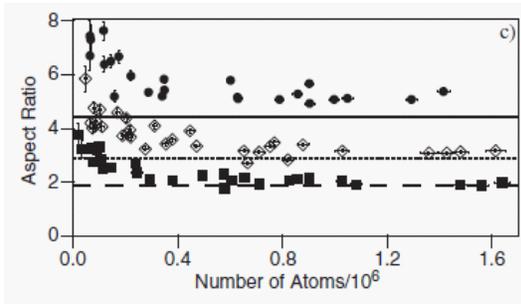
**Figure 1:** Crossover de 3D-BEC a 1D-BEC. A linha tracejada representa o comportamento de um condensado tridimensional. Diminuindo  $N$  se observa o aparecimento dos efeitos unidimensionais

2)consequentemente, o número de átomos no condensado deve ser reduzido, o que é conseguido através da exposição do condensado a um feixe térmico. A redução de dimensionalidade eficaz torna-se evidente quando a relação de aspecto do condensado, que é independente de  $N$  em 3D começa a mudar à medida que o número de átomos é gradualmente reduzido, como mostrado na figura 1 e na figura 2.

Das três armadilhas usadas para o crossover 2D, a mais fraca deu  $N_{2D} = 2.9 \times 10^5$ , enquanto se pudo observar condensados com números de átomos inferior a  $N_{2D}/10$ . Para o caso 1D,  $N_{1D} = 1.5 \times 10^4$ , enquanto se pudo observar condensados com números de átomos inferior a  $N_{1D}/2$ . Neste experimento, a nuvem térmica é sempre tridimensional.

#### 3.1 Relevância de um condensado de dimensão reduzida

Enquanto 3D BEC muito bem explorado, BEC em 2D só recentemente foram alcançados e mais investigados. Devido aos fenômenos interessantes que ocorrem em dimensionalidade reduzida que são devido ao confinamento de duas dimensões espaciais: Fractional Quantum Hall-states têm sido usados para descrever autovalores de um con-



**Figure 2:** As linhas indicam as proporções esperadas para condensados 3D. Atribuíam-se discrepâncias entre relações de aspecto dos valores esperados e medidos para um grande número à influência de anarmonicidades sobre a medição das frequências da armadilha.

densado 2D rotante com vórtices. Vórtices em um sistema de 2D são topologicamente estabilizados. este permite efeitos como a transição Kosterlitz-Thouless fases para ter lugar.

## REFERENCES

- [1] P. C. Hohenberg, Phys. Rev. 158, 383 1967 .
- [2] A. Widom, Phys. Rev. 176, 254 1968 .
- [3] W. J. Mullin, J. Low Temp. Phys. 106, 615 (1997).
- [4] A. Görlitz et al., Phys. Rev. Lett. 87, 130402 (2001).
- [5] V. Bagnato and D. Kleppner, Phys. Rev. A 44, 7439 (1991).